E.N.S.E.T. Section B' 1985

Durée : 3 heures

L'épreuve est constituée de trois problèmes obligatoires. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

x étant un réel distinct de 0 on considère l'intégrale :

$$I_x = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{|1-t|\,(1+3t)}}$$

l'existence de I_x étant prise au sens des intégrales de Riemann ordinaires ou éventuellement au sens des intégrales de Riemann généralisées. (On ne demande pas de calculer, lorsqu'elle existe, cette intégrale, sauf dans la dernière question.) On propose l'étude de la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = I_x \end{cases}$$

lorsque l'intégrale I_x existe.

1° *a.* Déterminer le domaine de continuité de la fonction g :

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{|1-t|\,(1+3t)}}$$

En déduire tous les réels $x \in \mathbb{R}^+$ tels que cette fonction g soit continue sur l'intervalle $[x, 2x]$. Trouver de même tous les réels $x < 0$ tels que g soit continue sur l'intervalle $[2x, x]$.

b. Les intégrales généralisées :

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{0} g(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^2 g(t)\,dt$$

sont-elles convergentes?

2° Déduire de la question précédente le domaine de définition de la fonction f. La fonction f est-elle continue sur ce domaine ?

3° Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists T \in \mathbb{R}^+$$

tel que :

$$t > T \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\varepsilon) < \log(t) < \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\varepsilon)$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

4° Trouver le domaine de dérivabilité de la fonction f. Montrer que sur son domaine de définition $f'(x)$ est du signe de $h(x)$ où :

$$h(x) = 4\,|1-x|\,(1+3x) - |1-2x|\,(1+6x)$$

En déduire le tableau des variations de f.

5° Étudier le signe de $f(x)$ et tracer sommairement le graphe de f, en précisant les tangentes parallèles aux axes.

6° Calculer l'intégrale $f(1) = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{|1-t|\,(1+3t)}}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

f et g étant 2 endomorphismes donnés d'un même espace vectoriel E de dimension finie sur C, on se propose d'étudier si les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ sont simultanément diagonalisables.

Dans ce qui suit $E = C^n$, il est muni d'une base, par exemple la base canonique. Les endomorphismes f et g peuvent être alors représentés par leurs images matricielles A et B relativement à cette base.

On pourra donc raisonner soit avec f et g, soit avec A et B. I désignera la matrice unité d'ordre n, image matricielle de l'endomorphisme identité e de E.

1° Dans cette question, on suppose que f et g sont inversibles.

a. En utilisant dét $(BAB - \lambda B)$ où λ est un scalaire réel ou complexe et où « dét » désigne la fonction déterminant, montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

b. Soit λ une valeur propre de $f \circ g$ (donc valeur propre également de $g \circ f$). On désigne par E_λ (respectivement par F_λ) le sous-espace propre de $f \circ g$ associé à λ (resp. de $g \circ f$ associé à λ). Démontrer les inclusions :

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \qquad \text{et} \qquad f(F_\lambda) \subset E_\lambda$$

Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?

c. Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors il en est de même pour $g \circ f$.

2° Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.

a. Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même pour $g \circ f$.

b. Soit $\alpha \in C \setminus \{0\}$ tel que $C = (AB - \alpha I)^{-1}$ existe. Montrer que :

$$(BA - \alpha I)\,(BCA - I) = \alpha I$$

Que peut-on en déduire pour dét $(BA - \alpha I)$?

c. Déduire de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

d. En utilisant, par exemple pour $n = 2$, des matrices A et B simples, montrer que AB peut être une matrice diagonalisable sans que BA le soit.

TROISIÈME PROBLÈME

On considère la suite numérique u_n définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

a. Trouver pour $n \geq 1$ une relation entre u_n et u_{n-1}.

b. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 1$$

Montrer que :

$$u_n = \frac{n!}{e}\,|e - \varphi(n)|$$

c. Montrer qu'il existe 2 nombres strictement positifs a et b tels que :

$$\frac{a}{(n+1)!} < e - \varphi(n) < \frac{b}{(n+1)!} \quad \forall n$$

En déduire un encadrement pour u_n.

d. Trouver les natures des séries de termes généraux :

$$u_n\,, \qquad \frac{u_n}{n}\,, \qquad \frac{u_n}{\operatorname{Log} n}$$

e. Trouver le rayon de convergence de la série entière : $\sum_0^\infty u_n x^n$.

f. La suite $n\,u_n$ admet-elle une limite ?